NOTA SOBRE INDETERMINAÇÕES

HÉLIO BERNARDO LOPES

Resumo. Em domínios diversos da Matemática, como por igual nas suas aplicações, surgem com alguma frequência indeterminações, de tipos diversos, no cálculo de limites, seja de sucessões, seja de funções. Levantar essas indeterminações é uma tarefa simples, que pode hoje, de resto, fazer-se de um modo fácil e rápido através da utilização de máquinas de calcular potentes, ou de adequados programas computacionais. Mau grado tal, a coletânea de exemplos que se mostram neste texto, todos ligados a funções reais de variável real, permite uma dominância dos mecanismos que podem servir para levantar essas mesmas indeterminações.

Há já uns bons anos, em conversa corrente com um conjunto de alunos do primeiro ano de certo curso de licenciatura em Gestão, no âmbito da actividade escolar de certa instituição de ensino superior, foi possível ouvir a um desses alunos esta dúvida: *qual é a razão de se chamar a estes casos indeterminações?*

Depois de explicado o conceito de indeterminação, determinei-me a escrever um pequeno texto, à laia de memorando, de molde a clarificar aquele conceito através de exemplos diversos, deitando mão da mais importante noção da Análise Matemática, a noção de limite, embora aplicada ao caso do comportamento de funções em circunstâncias determinadas. É esse texto, então elaborado, que se apresenta aqui.

Quando se pretende calcular o limite para que tende certa função, que aqui se considera como real de variável real, à medida que a respectiva variável independente se aproxima de certo ponto do seu domínio, ou cresce indefinidamente em módulo, pode ser-se conduzido a uma expressão que, no imediato, não terá um significado conhecido. Uma tal situação toma o nome de **indeterminação**.

Quando tal sucede, procede-se ao levantamento dessa indeterminação, para tal deitando mão de instrumentos matemáticos diversos, adequados ao caso que se pretende estudar.

Vão, pois, tratar-se aqui as diversas indeterminações que podem surgir no cálculo de limites de funções reais de varíavel real, deitando mão de exemplos diversos que sirvam para ilustrar que certa indeterminação pode, afinal, representar, de facto, coisas matemáticas distintas, em cenários igualmente diferentes.

INDETERMINAÇÃO DO TIPO 0/0

Para ilustrar este tipo de indeterminação considere-se o cálculo do limite da função que se trata no seguinte

EXEMPLO. Seja a função:

$$f(x) = \frac{x}{1-e^x}$$

definida em **R**/$\{0\}$. Pretende calcular-se:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1-e^x}.$$

Procedendo ao cálculo do limite, nos termos conhecidos, virá:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1-e^x} = \frac{0}{0}$$

caindo-se, pois, numa indeterminação. Recorrendo à Regra de Hospital, com a finalidade de levantar esta indeterminação, ter-se-á:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1-e^x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{-e^x} = -1.$$

Pôde, deste modo, ficar a saber-se que a função considerada se aproxima de -1 quando a variável independente se aproxima de 0 por valores maiores que 0, ou seja, pela direita deste valor. •

Seja, agora, a nova função que se estuda no seguinte

EXEMPLO. Pretende calcular-se:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{1-e^x}$$

onde a função de encontra também definida em em **R**/$\{0\}$. Ora, tal como no caso tratado no exemplo anterior, também aqui se está perante uma indeterminação do mesmo tipo, dado ter-se:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{1-e^x} = \frac{0}{0}.$$

Recorrendo, mais uma vez, à Regra de Hospital, virá:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{1-e^x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{-e^x} = 0. \bullet$$

Por fim, um terceiro exemplo, com a função tratada no seguinte

EXEMPLO. Seja, desta vez, a função definida em **R**/$\{0\}$, para a qual se pretende calcular:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2}.$$

Dado que se tem:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2} = \frac{0}{0}$$

poderá recorrer-se à propriedade anteriormente utilizada, obtendo-se, então:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{2x} = +\infty. \bullet$$

INDETERMINAÇÃO DO TIPO ∞/∞

Para se proceder à ilustração deste tipo de indeterminação comece-se pelo cálculo do limite da função que se trata no seguinte

EXEMPLO. Seja a função:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 7}$$

definida em **R**/{−7}. Pretende aqui calcular-se:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x + 7} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

dado que a aplicação das regras correntes conduz à nova indeterminação que pode ver-se. Ora, neste caso, pode levantar-se a indeterminação através de um artifício:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x + 7} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\left[1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right]}{x\left[1 + \frac{7}{x}\right]} = \lim_{x\to +\infty}\left[x \cdot \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{7}{x}}\right] = +\infty \cdot \frac{1 + 0 + 0}{1 + 0} = +\infty \cdot$$

Pôde assim perceber-se que a função estudada cresce indefinidamente quando o mesmo se dá com a variável independente. •

Seja agora o caso da função estudada no seguinte

EXEMPLO. Seja a função:

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-3x+2}$$

definida em]2,+∞[, e para a qual se tem a indeterminação:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-3}{x^2-3x+2} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Voltando a deitar mão do anterior artifício, virá:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[1-\frac{3}{x}\right]}{x^2\left[1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right]} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{1-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right] = 0\cdot\frac{1-0}{1-0+0} = 0$$

ficando assim a saber-se que, quando a variável independente cresce indefinidamente no semi-eixo positivo das abcissas, a função aproxima-se de zero, embora por valores maiores que zero. Ou seja, a função tem no eixo das abcissas uma assímptota horizontal. •

Por fim, tome-se a função que se apresenta no seguinte

EXEMPLO. Considere-se a função definida em [10,+∞[, para a qual surge a indeterminação:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-7x+1}{3x^2+x-7} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Mais uma vez pode recorrer-se ao anterior artifício, vindo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-7x+1}{3x^2+x-7} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left[2-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}\right]}{x^2\left[3+\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}\right]} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}} = \frac{2-0+0}{3+0-0} = \frac{2}{3}$$

o que mostra que, também aqui, a função estudada apresenta uma assímptota horizontal, que é a recta de nível de ordenada igual ao limite encontrado. •

INDETERMINAÇÃO DO TIPO 0^0

Para facilmente se entender o que está em jogo neste caso, ilustra-se o mesmo com o estudo de duas funções, a primeira das quais se apresenta com o seguinte

EXEMPLO. Seja a função:

$$f(x) = x^{1-e^x}$$

definida em]0,+∞[, para a qual se tem a indeterminação:

$$\lim_{x \to 0^+} x^{1-e^x} = 0^{1-1} = 0^0.$$

Para se levantar esta indeterminação, começa por tomar-se o logaritmo da função em estudo, obtendo-se:

$$\ln f(x) = \left(1-e^x\right)\ln(x) = \frac{\ln(x)}{\left(1-e^x\right)^{-1}}$$

vindo então:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{1-e^x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{\left(1-e^x\right)^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(1-e^x\right)^2}{x.e^x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2\left(1-e^x\right)e^x}{e^x + x.e^x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2\left(1-e^x\right)}{1+x} = 0$$

pelo que se tem:

$$\lim_{x \to 0^+} \ln f(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = e^0 = 1. \bullet$$

Seja, agora, o segundo caso referido e que se apresenta com o seguinte

EXEMPLO. Seja a função:

$$f(x) = (senx)^{\frac{3}{\ln x}}$$

definida em]0,1[, e para a qual se tem a indeterminação:

$$\lim_{x \to 0^+} (senx)^{3(\ln x)^{-1}} = 0^0 .$$

Aplicando logaritmos à função dada, virá:

$$\ln(senx)^{3(\ln x)^{-1}} = \frac{3\ln(senx)}{\ln x}$$

pelo que se terá:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3\ln(senx)}{\ln x} = 3. \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{senx}}{\frac{1}{x}} = 3 \lim_{x \to 0^+} (\cos x) \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{(senx)} = 3 .$$

Nestes termos, ter-se-á:

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(senx)^{3(\ln x)^{-1}} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x \to 0^+} (senx)^{3(\ln x)^{-1}} = e^3 . \bullet$$

INDETERMINAÇÃO DO TIPO 1^{∞}

Para se entender de um modo simples o que está em jogo com este tipo de indeterminação, ilustra-se o mesmo com o estudo de duas novas funções, a primeira das quais se apresenta com o seguinte

EXEMPLO. Seja a função:

$$f(x) = \left[\frac{x+8}{x-2}\right]^{x}$$

definida em]2,+∞[, e para a qual se tem a indeterminação:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+8}{x-2}\right]^{x} = \left[\lim_{x\to+\infty}\frac{x+8}{x-2}\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty} x} = 1^{\infty}.$$

Neste caso a indeterminação surgida pode levantar-se de um modo simples e já conhecido do ensino secundário, tendo-se, assim:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+8}{x-2}\right]^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{10}{x-2}\right]^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{10}{x-2}\right]^{(x-2)\frac{x}{(x-2)}} = \lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{10}{x-2}\right]^{(x-2)\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2}} = \left(e^{10}\right)^{1} = e^{10}.$$

•

Veja-se, agora, o segundo caso deste tipo de indeterminação, através da função estudada no seguinte

EXEMPLO. Tome-se a função:

$$f(x) = \left[\frac{x}{2}\right]^{\frac{1}{x-2}}$$

definida em]2,+∞[, e para a qual se tem a indeterminação:

$$\lim_{x\to 2^{+}}\left[\frac{x}{2}\right]^{\frac{1}{x-2}} = 1^{\infty}.$$

Aplicando logaritmos à função dada, virá:

$$\ln\left[\frac{x}{2}\right]^{\frac{1}{x-2}} = \frac{\ln(x)-\ln(2)}{x-2}$$

pelo que se tem:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\ln(x)-\ln(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{x}-0}{1-0} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

pelo se virá:

$$\lim_{x\to 2^+} \ln\big(f(x)\big) = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}. \bullet$$

INDETERMINAÇÃO DO TIPO ∞–∞

Para se compreender, de um modo simples, o presente tipo de indeterminação, ilustra-se o mesmo com o estudo de quatro funções, a primeira das quais se apresenta com o seguinte

EXEMPLO. Seja a função:

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9}$$

definida em]3,+∞[, e para a qual se tem a indeterminação:

$$\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9}\right] = \infty - \infty.$$

Ora, a função dada pode escrever-se na forma:

$$f(x) = \frac{x+3-6}{x^2-9} = \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{x+3}$$

pelo que virá:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6} \cdot \bullet$$

EXEMPLO. Considere-se a função:

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-9}$$

definida em $]3,+\infty[$, e para a qual se tem a indeterminação:

$$\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-9}\right] = \infty - \infty\,.$$

Ora, a função dada pode escrever-se na forma:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$$

pelo que virá:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x+2}{x^2-9} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

ou seja, a função dada apresenta a assímptota vertical, de equação, $x = 3$. •

EXEMPLO. Pense-se agora na função:

$$f(x) = \sqrt{x^2-4x+3} - \sqrt{x^2-4x+4}$$

definida em $]3,+\infty[$, e para a qual se tem a indeterminação:

$$\lim_{x\to +\infty}\left[\sqrt{x^2-4x+3} - \sqrt{x^2-4x+4}\right] = \infty - \infty.$$

Tem-se, então:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-4x+4}\right]\left[\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-4x+4}\right]}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-4x+4}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-4x+4}} = \frac{-1}{+\infty} = -\infty \cdot \bullet$$

EXEMPLO. Por fim, a quarta função que ilustra este tipo de indeterminação:

$$f(x) = ch(x) - sh(x)$$

definida em **R**, e para a qual se tem a indeterminação:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[ch(x) - sh(x)\right] = +\infty - \infty.$$

Dado que se tem:

$$f(x) = \left[ch(x) - sh(x)\right] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x}$$

virá, por fim:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[ch(x) - sh(x)\right] = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0. \bullet$$

INDETERMINAÇÃO DO TIPO 0.∞

A fim de se compreender facilmente este tipo de indeterminação, ilustra-se o mesmo com o estudo de quatro funções, a primeira das quais se apresenta com o seguinte

EXEMPLO. Seja a função:

$$f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x-2}}$$

definida em]2,+∞[, e para a qual se tem a indeterminação:

$$\lim_{x\to 2^+}(x-2)e^{\frac{1}{x-2}} = 0\cdot\infty.$$

Ora, simplificando e deitando mão da Regra de Hospital, virá, finalmente:

$$\lim_{x\to 2^+}(x-2)e^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{\dfrac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-\dfrac{1}{(x-2)^2}e^{\frac{1}{x-2}}}{-\dfrac{1}{(x-2)^2}} = \lim_{x\to 2^+}e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty. \bullet$$

EXEMPLO. Considere-se a função:

$$f(x) = \sqrt{x}\ln(x)$$

definida em]0,+∞[, e para a qual se tem a indeterminação:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\sqrt{x}\ln(x)\right] = 0.(-\infty).$$

Virá, então:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\sqrt{x}\ln(x)\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x^{-0,5}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-0,5x^{-1,5}} = -2\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0. \bullet$$

EXEMPLO. Tome-se a função:

$$f(x) = e^{-x+3}.e^{x-4}$$

definida em **R**, e para a qual se tem a indeterminação:

$$\lim_{x\to +\infty}\left[e^{-x+3}.e^{x-4}\right] = 0\cdot\infty.$$

Acontece que a função dada pode escrever-se, de um modo equivalente e simplificado, na forma:

$$f(x) = e^{-x+3}.e^{x-4} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

ou seja, a função dada é uma função constante, pelo que se tem:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot \bullet$$

INDETERMINAÇÃO DO TIPO ∞^0

Finalmente, o último tipo de indeterminação, para o qual se mostram aqui duas funções, a primeira das quais se apresenta com o seguinte

EXEMPLO. Seja a função:

$$f(x) = \left[\frac{x^2+2x+1}{x-3}\right]^{\frac{1}{x}}$$

definida em]3,+∞[, e para a qual se tem a indeterminação:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+2x+1}{x-3}\right]^{\frac{1}{x}} = \infty^0 \cdot$$

Aplicando logaritmos à função em estudo, virá:

$$\ln\left[\frac{x^2+2x+1}{x-3}\right]^{\frac{1}{x}} = \frac{\ln\left[\frac{x^2+2x+1}{x-3}\right]}{x}$$

pelo que se terá:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[\dfrac{x^2+2x+1}{x-3}\right]}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\dfrac{(2x+2)(x-3)-\left(x^2+2x+1\right)}{(x-3)^2}}{\dfrac{x^2+2x+1}{x-3}}}{1}=0.$$

A obtenção deste valor só na aparência é complicada, dependendo apenas de simplificações algébricas bastante elementares. Assim, ter-se-á:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\big(f(x)\big)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=e^0=1. \bullet$$

EXEMPLO. Seja a função:

$$f(x)=\left[e^x+7\right]^{\frac{1}{x}}$$

definida em]0,+∞[, e para a qual se tem a indeterminação:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[e^x+7\right]^{\frac{1}{x}}=\infty^0.$$

Acontece que a função dada pode assumir a forma equivalente que se mostra de seguida:

$$\left[e^x+7\right]^{\frac{1}{x}}=\left(e^x\left[1+\frac{7}{e^x}\right]\right)^{\frac{1}{x}}=e\left[1+\frac{7}{e^x}\right]^{\frac{1}{x}}=e\left[1+\frac{7}{e^x}\right]^{e^x\frac{1}{xe^x}}$$

pelo que virá:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[e^x+7\right]^{\frac{1}{x}}=e\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{7}{e^x}\right]^{e^x\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x}}=e\left(e^7\right)^0=e. \bullet$$

O conjunto de exemplos que se apresentou anteriormente, pensa-se, terá ilustrado os diversos tipos de indeterminação que se apresentam quando procuram calcular-se limites de funções reais de variável real, ou simplesmente de sucessões de termos reais, mas também o modo de operar o seu levantamento.